1. Utilizando a(s) função(ões) do método de Newton-Raphson que construímos em sala, encontre o valor de x onde as funções abaixo apresentam seu máximo valor

   (a) $f(x) = x \cdot \exp(-x)$, com $x > 0$

   (b) $f(x, y) = \log(x) + \log(y) - x^2 - y^2$, com $x, y > 0$

   (c) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + \log(1 + x + y)$, com $x, y > -1$

2. Agora utilize a função `optim()` do R para encontrar o ponto de máximo das funções acima. Lembre-se que a função `optim()` minimiza, portanto otimize o negativo das funções.

3. Considere a distribuição de Lindley Generalizada com função densidade:

$$f(x; \theta, \lambda) = \frac{\theta^2}{\theta + \lambda}(1 + x)\exp(-\theta x)\exp(-\lambda x), \quad x > 0, \theta, \lambda > 0$$

   (a) Simule uma amostra de tamanho $n = 200$ com parâmetros $\theta = 3$ e $\lambda = 1.5$. Você pode usar a função `rGLindley(n, theta, lambda)` do pacote `extraDistr`.

   (b) Escreva a função de log-verossimilhança com base nos dados observados.

   (c) Use o algoritmo de Newton-Raphson para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança para θ e λ.

   (d) Agora, utilize o algoritmo do método de Fisher para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança para θ e λ.

   (e) Compare os resultados obtidos por ambos os métodos e faça o ajuste da curva estimada sobre os dados simulados.

4. Considerando o exercício sobre a distribuição logística da lista anterior, simule uma amostra de tamanho 100 com parâmetros $\mu = 5$ e $s = 2$.

   (a) Estime os parâmetros μ e s da **distribuição logística** a partir da amostra simulada utilizando a função `optim` do R.

   (b) Estime novamente os parâmetros utilizando os métodos disponíveis nas funções `maxLik` (do pacote `maxLik`) e `fitdist` (do pacote `fitdistrplus`).

   (c) Compare os resultados obtidos pelos métodos e faça o ajuste da curva estimada sobre os dados simulados.

5. Considerando o exercício anterior sobre a geração de variáveis aleatórias com a **distribuição de Chen**, simule uma amostra de tamanho 100 com parâmetro $\theta = 1{,}5$.

   (a) Estime o parâmetro θ da distribuição de Chen a partir da amostra simulada utilizando a função `optim` do R.

   (b) Estime novamente o parâmetro utilizando as funções `maxLik` (do pacote `maxLik`) e `fitdist` (do pacote `fitdistrplus`), e compare os resultados com os do item anterior.

   (c) Compare os resultados obtidos pelos métodos e faça o ajuste da curva estimada sobre os dados simulados.

6. Considere a distribuição Gama Inversa com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right), \quad x > 0,\ \alpha,\beta > 0$$

   No R, essa distribuição pode ser simulada usando a função `rinvgamma(n, shape, scale)` do pacote `MCMCpack`.

   (a) Gere uma amostra de tamanho 200 da distribuição Gama Inversa com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

   (b) Escreva a função de log-verossimilhança para a Gama Inversa e estime os parâmetros α e β via máxima verossimilhança usando o pacote `maxLik`. E faça o ajuste da curva estimada sobre os dados simulados.

   (c) Utilize a função `microbenchmark()` para comparar o tempo de estimação com pelo menos três diferentes chutes iniciais para os parâmetros.

7. Considere uma variável aleatória $X \sim \text{Rayleigh}(\sigma)$, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x;\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0, \sigma > 0.$$

   (a) Simule uma amostra de tamanho $n = 300$ da distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sigma = 2$, utilizando a função `rRayleigh()` do pacote `VGAM`.

   (b) Escreva a função de log-verossimilhança e estime o parâmetro σ por máxima verossimilhança usando o pacote `maxLik`.

   (c) Faça o ajuste da curva com os parâmetros estimados sobre os dados simulados.

8. Considere um modelo de regressão linear simples, amplamente utilizado para descrever relações lineares entre uma variável resposta y e uma variável explicativa x, dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

onde $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ representa o erro aleatório.

(a) Simule um conjunto de dados (x_i, y_i) com:

$$\beta_0 = 6, \quad \beta_1 = 0{,}8, \quad \sigma = 1,$$

e x_i igualmente espaçados no intervalo [0,100], com $n = 60$ observações.

(b) Ajuste o modelo linear utilizando a função `lm()` do R.

(c) Compare os parâmetros verdadeiros e os estimados ($\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$).

(d) Faça um gráfico com os pontos observados e a reta ajustada.

9. Há uma curva não linear importante baseada na função de Richards (generalização da função logística), frequentemente utilizada para modelar crescimento biológico e populacional, dada por:

$$y = A\Big(1 + Be^{-Cx}\Big)^{-1/\nu},$$

onde $A > 0$ representa o valor assintótico máximo, $B > 0$ está relacionado ao deslocamento inicial da curva, $C > 0$ controla a taxa de crescimento e $\nu > 0$ é o parâmetro de forma que confere maior flexibilidade à curva.

(a) Simule um conjunto de dados (x_i, y_i) com base na equação acima, utilizando os parâmetros verdadeiros:

$$A = 20, \quad B = 2, \quad C = 0{,}6, \quad \nu = 0{,}5,$$

com x_i distribuídos em [0,10] (por exemplo, $n = 100$) e adicionando um erro aleatório normal $\varepsilon_i \sim N(0{,}1)$. Assim,

$$y_i = A\Big(1 + Be^{-Cx_i}\Big)^{-1/\nu} + \varepsilon_i.$$

(b) Ajuste o modelo não linear (curva de Richards) aos dados simulados utilizando a função `nls()` do R.

(c) Compare os parâmetros verdadeiros e os estimados obtidos no ajuste.

(d) Faça um gráfico contendo os pontos observados e a curva ajustada.

10. Utilize o conjunto de dados `ToothGrowth`, disponível no R. Considere, como variável resposta: `len` (comprimento do dente), e como covariável: `supp` (tipo de suplemento),

transformada em uma variável binária X tal que `supp` = "VC" seja a categoria de referência ($X_i = 0$). Ajuste os seguintes modelos à variável resposta $Y_i = \texttt{len}_i$:

(a) **Normal:**

$$Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), \quad \text{com} \quad \mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_i.$$

(b) **Lognormal:**

$$Y_i \sim \text{Lognormal}(\mu_i, \sigma^2), \quad \text{com} \quad \mu_i = \beta_0 + \beta_1 X_i.$$

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{y\,\sigma\,\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0,$$

$$F(y; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right),$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Média:

$$\mathbb{E}[Y_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

(c) **Gamma:**

$$Y_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda_i), \quad \text{com} \quad \mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i), \quad \lambda_i = \frac{\alpha}{\mu_i}.$$

(Note que esta parametrização difere daquela usual em alguns pacotes do R.)

$$f(y; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, \quad y > 0,$$

$$F(y; \alpha, \lambda) = \frac{\gamma(\alpha, \lambda y)}{\Gamma(\alpha)},$$

onde $\gamma(\cdot,\cdot)$ é a função gama incompleta inferior.

(**Dica:** No R $F(y; \alpha, \lambda) \Rightarrow$ `pgamma(y, alpha, lambda)`).

Média:

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 X_i).$$

(a) Estime os parâmetros dos modelos (Normal, Gamma e Lognormal) por máxima verossimilhança, utilizando o pacote `maxLik`. Para cada modelo, estime as médias ajustadas de Y para os dois grupos: $X = 0$ ("VC") e $X = 1$ ("OJ").

(b) Calcule o AIC e realize os testes de aderência para verificar qual modelo apresenta evidências de melhor ajuste aos dados.

(c) Plote, para cada modelo ajustado, o histograma dos dados observados sobreposto às curvas de densidade ajustadas.

(d) Interprete os resultados obtidos: qual distribuição descreve melhor o comportamento do comprimento dos dentes? Há indícios de assimetria nos dados que justifiquem o uso de modelos não normais?